

Enseñanza y Aprendizaje
de las *Ecuaciones*
Diferenciales a través de la
Modelación

Dra. Ruth Rodríguez Gallegos

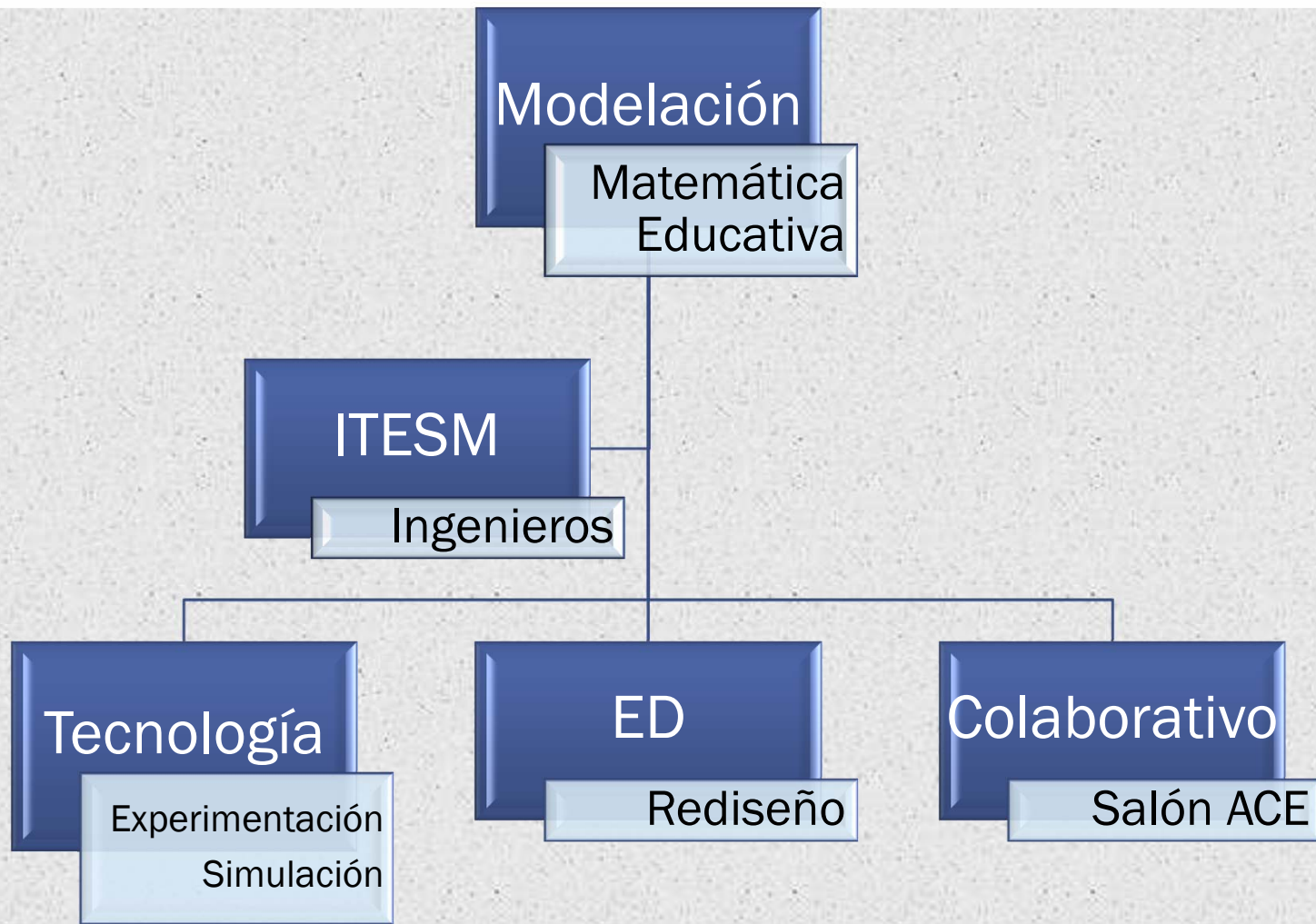
Cátedra en Matemática Educativa

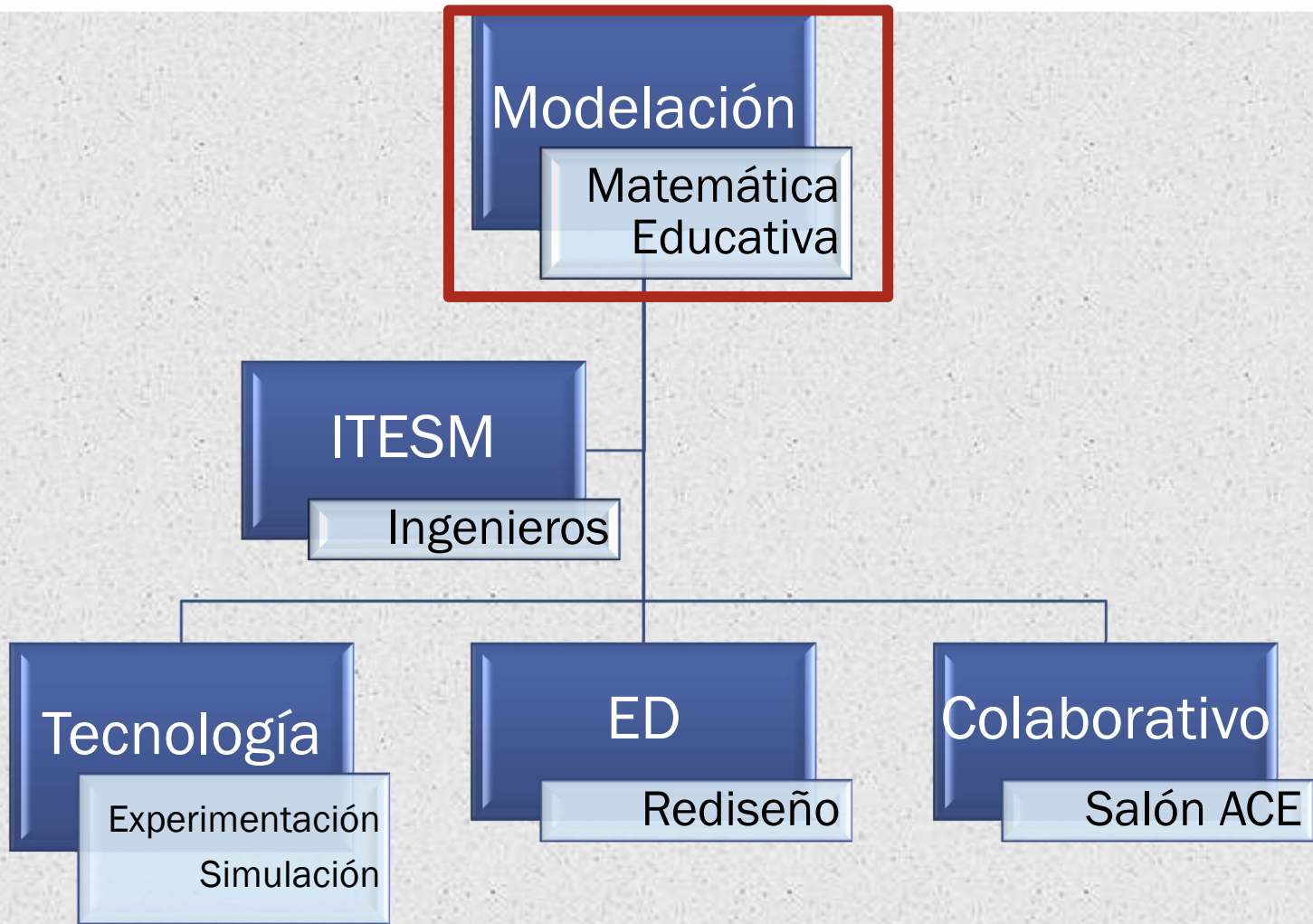
Tecnológico de Monterrey Campus Monterrey



Día Virtual CUDI “Matemáticas Aplicadas”

Martes 27 de Marzo del 2012





Una primera distinción importante

- o Modelación en:
 - o El ámbito profesional
 - o Modelación del experto o investigador
 - o El ámbito educativo
 - o *Modelación “escolar”*

Sobre la modelación

- o Tema central en Matemática Educativa durante los últimos **35 años** (*Niss, Blum y Galbraith, 2007*):
 - o *Modelación Matemática y Aplicaciones de las Matemáticas hacia campos extra-matemáticos*
- o Primera acepción: relaciones entre las Matemáticas y el mundo extra-matemático (“mundo real” o “el resto del mundo” (*Pollak, 1968*)).

Un hecho importante sobre modelación

- o Existen currículum y libros de texto con referencia a fenómenos y problemas de la vida real desde hace **25 años**.
- o La modelación tiene un papel importante en muchos salones de clase en diversos países sin embargo...
- o *“...aún existe una distancia importante entre las ideas expresadas en el debate educativo e innovación del currículum por un lado, y la práctica diaria de enseñanza, por el otro lado. En particular, actividades de modelación genuinas son aún raras en el aula de matemáticas” (Niss, Blum y Galbraigh, 2007).*
- o Aumento de investigaciones genuinas los últimos **15 años**.



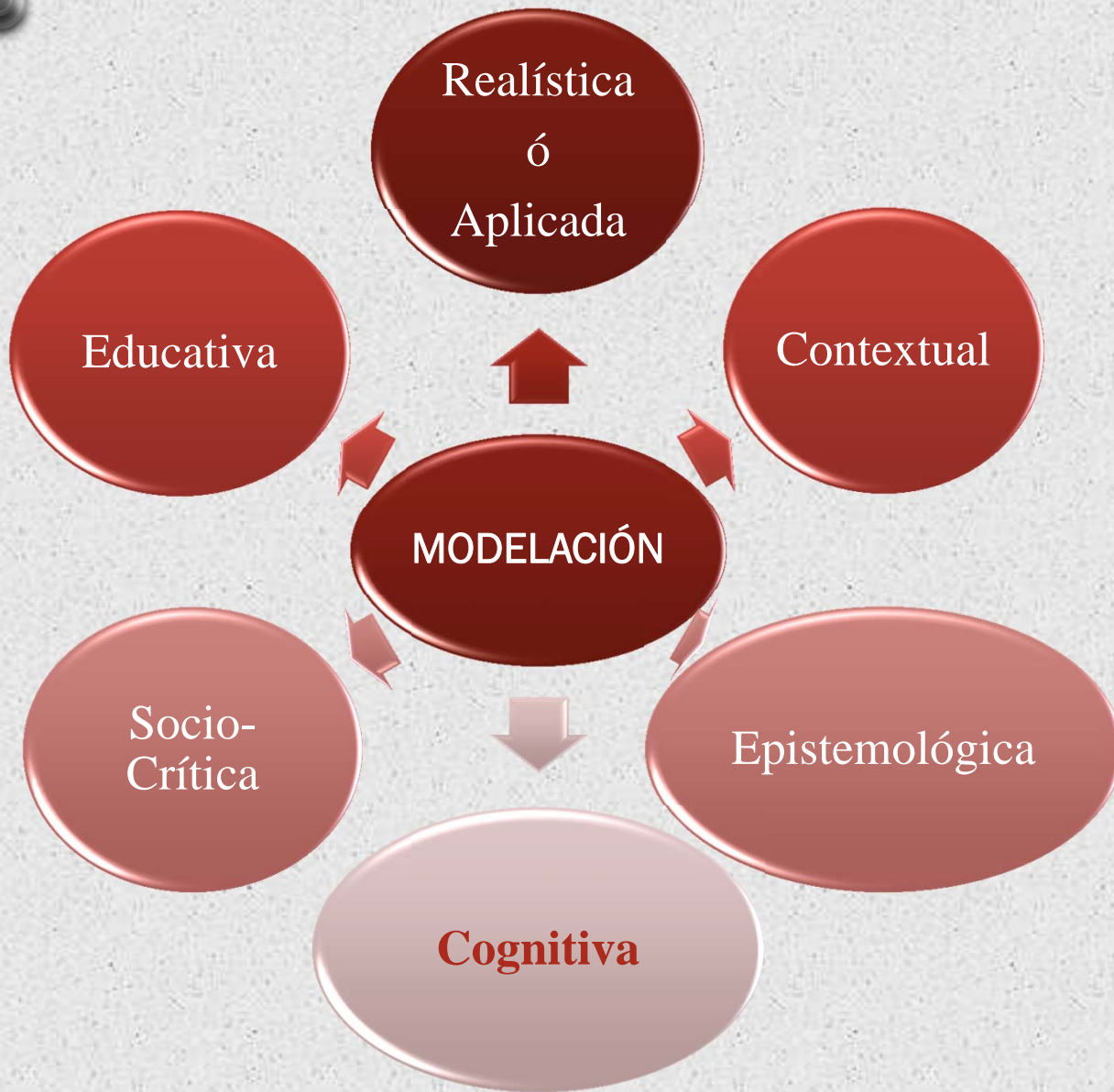
Consejo Nacional de Profesores para la Modelación y Aplicaciones

- Desde 1983,
- Organiza un congreso cada 2 años
- Grupo reconocido por ICMI, se reúne además cada 4 años en ICME.



Modelación y Tecnología (MyT)

- Desde 2007, grupo latinoamericano
- Se reúne cada año en RELME (2008, 2009, 2010, 2011, 2012)
- Grupo reconocido por CLAME y Red de CIMATES. Se reúne además cada año en EIME (2010 y 2011)

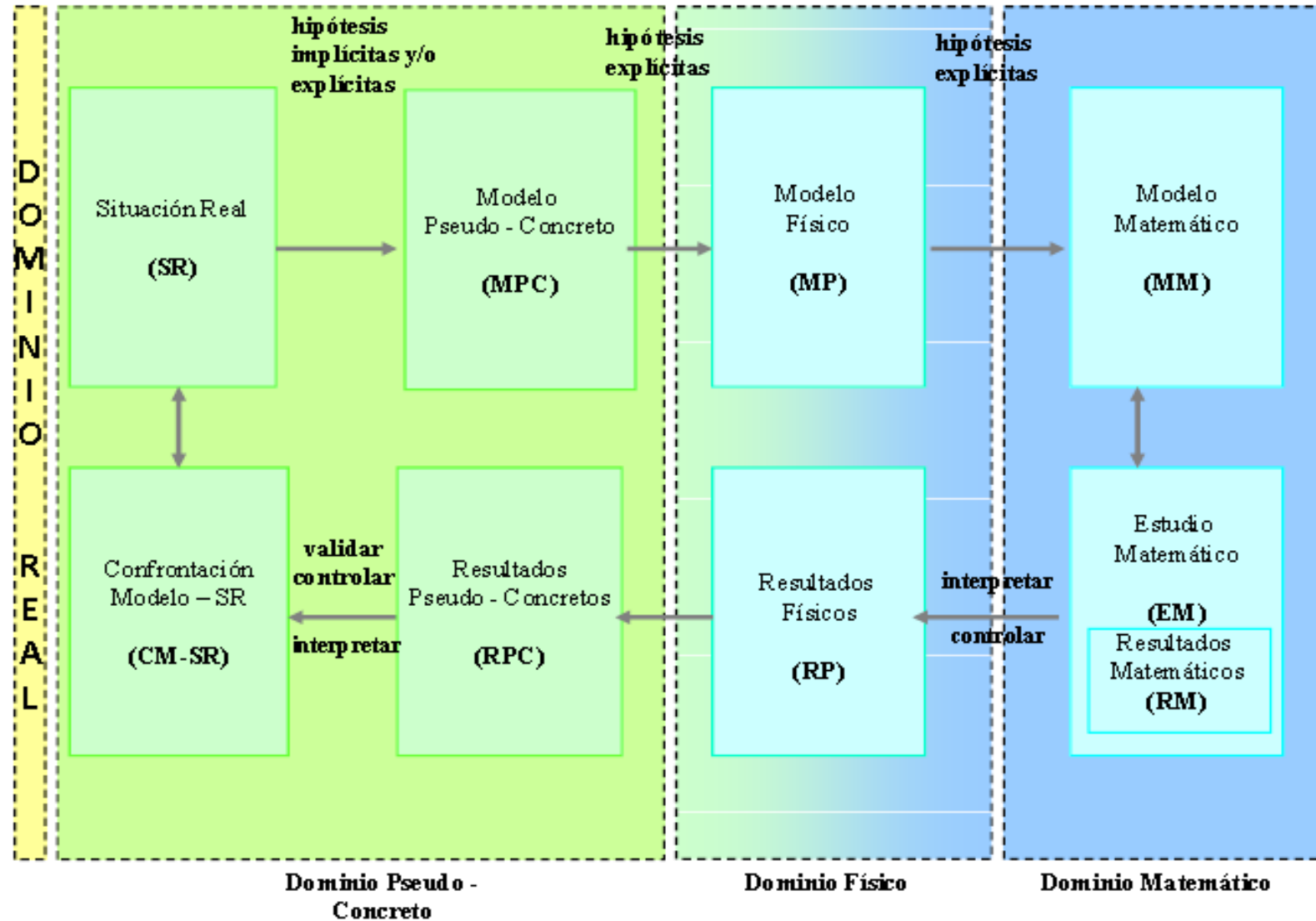


Perspectivas de la Modelación en Educación
(Kaiser y Siraman, 2006)

Modelación es...

- Modelación es entendida como un medio de usar/construir conceptos a través de una tarea asociada a una situación que llamaremos “situación-problema”.
- En este sentido, modelación es una construcción o uso particular de un modelo que incorpora conocimiento científico, tomando en cuenta las condiciones particulares de una situación o de una clase de situaciones, la cual permite formular una respuesta relativa a la situación.

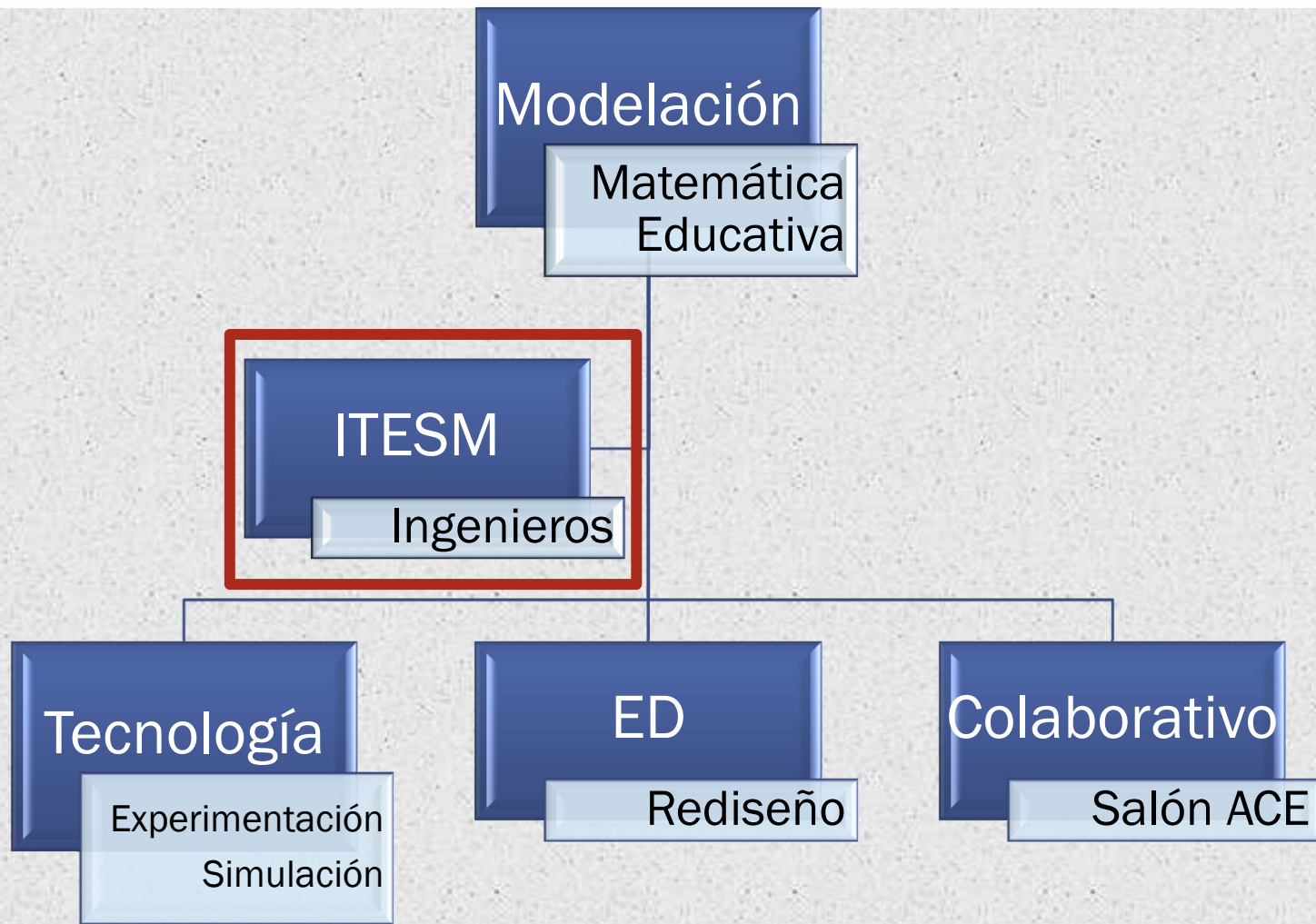
(López y Costa, 2007, p. 812)



Proceso de Modelación (Rodríguez, 2007; 2010)

Resultados alrededor de la implementación de modelación

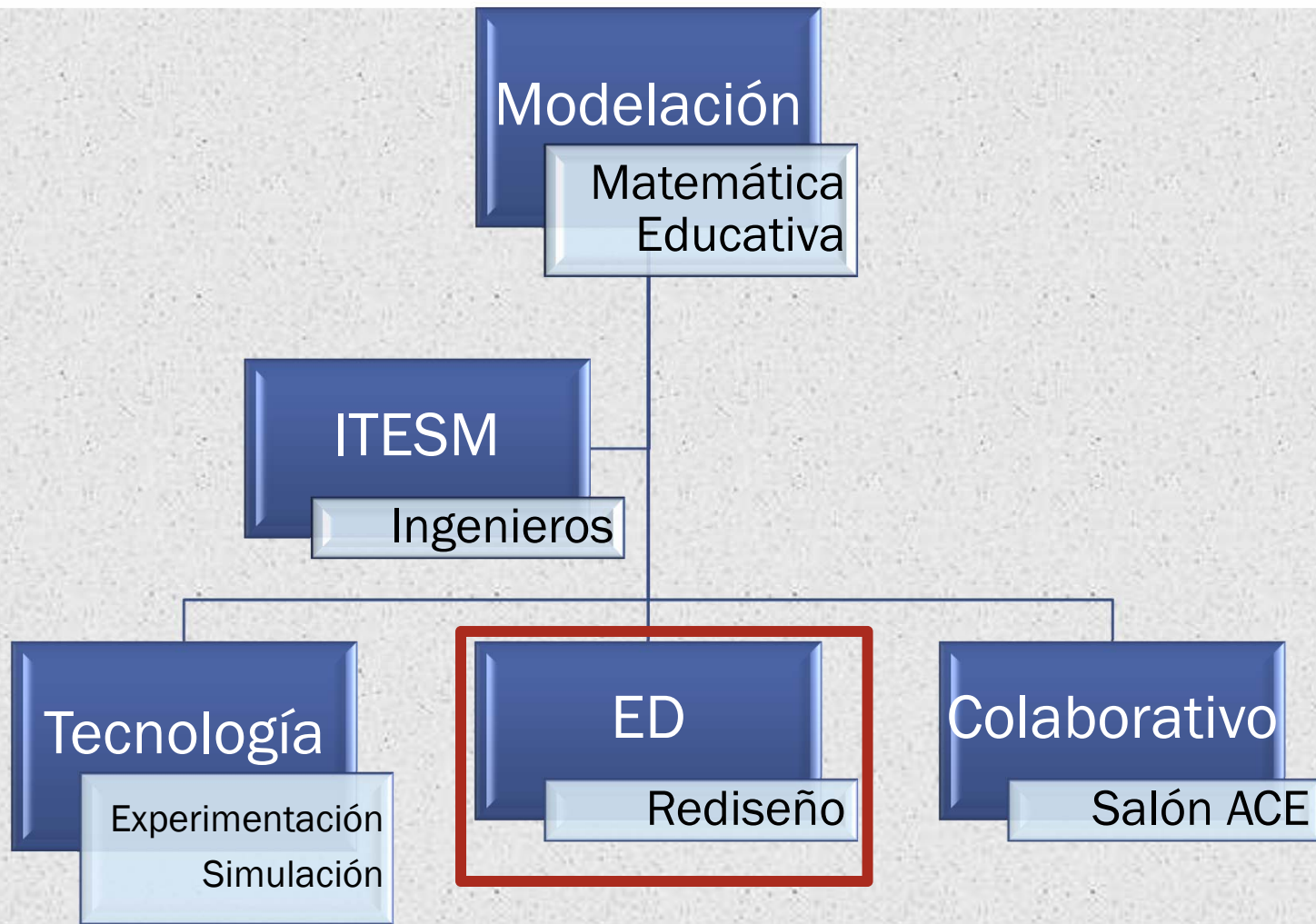
- ▶ **Habilidades matemáticas** son requeridas para adquirir competencias de modelación positivamente
- ▶ **Conocimiento sobre** el proceso de **modelación** influye positivamente para adquirir competencias de modelación
- ▶ El contenido del **contexto a modelar** tiene una gran influencia. El contexto puede motivar pero también distraer de un problema.
- ▶ **Trabajo en grupos** pequeños y discusiones grupales apoyan el desarrollo de competencias de modelación



Antecedentes

o Profesional

- o Rediseño del Sector Curricular de Matemáticas para Ingenieros
 - o Desde el año 2000
 - o Aspecto instrumental de las matemáticas, modificar el qué y cómo enseñar (*Douady, 1984; Duval, 1995; Salinas y Alanís, 2009*).
- o Proyecto Rediseño del curso de Ecuaciones Diferenciales
 - o Desde agosto 2008, actualmente en curso
 - o Trabajo colegiado con 15 profesores del departamento de Matemáticas
 - o Plan de Estudios 2011
 - o Implementación: agosto 2012



Problemática de las ED

**Propuestas
de cursos
existentes**

*Prácticas de
uso
en otras
disciplinas
(materias de
especialidad)*

Problemática
alrededor de
las ED

Resultados de
**Matemática
Educativa**
(investigación
educativa)
alrededor de la E-A
de las ED.

*Componente
Histórica-epistemológica*

Fuentes del currículum (*Casarini, 1987*)

Psico-pedagógica

- *Antecedentes institucionales
Misión 2015
Competencias en Planes de Estudio 2011
- *Cursos nacionales e internacional
- *Propuestas Innovadoras
Blanchard (desde 1994) con un énfasis importante en modelación de fenómenos, énfasis en análisis cualitativo

Epistemológica

- *Estudios históricos (ej. Miranda y Cordero 2006, Laplace)
- *Epistemología de las ED
- *Investigaciones de la E-A de las Ecuaciones Diferenciales (desde diferentes perspectivas teóricas) en ME

Profesional

- *Estudios Previos
Rediseño de Cálculo, 12 años)
- *Entrevistas a profesionales (Química, Industriales, Eléctricos, Mecatrónica, Control)
- *Observaciones de clases
Señales y Sistemas
Circuitos Eléctricos
Identificar prácticas de uso de ED en ingeniería
ED como modelo de fenómenos diversos

Fuentes del currículum (*Casarini, 1987*)

Psico-pedagógica

- *Antecedentes institucionales
- Misión 2015
- Competencias en Planes de Estudio 2011

- *Cursos nacionales e internacional
- *Propuestas Innovadoras
- Blanchard (desde 1994) con un énfasis importante en modelación de fenómenos, énfasis en análisis cualitativo (simulador)

Epistemológica

- *Estudios históricos (ej. Miranda y Cordero 2006, Laplace)

- *Epistemología de las ED

- *Investigaciones de la E-A de las Ecuaciones Diferenciales (desde diferentes perspectivas teóricas) en ME (las cuales muestran relación con Tecnología y AC)

Profesional

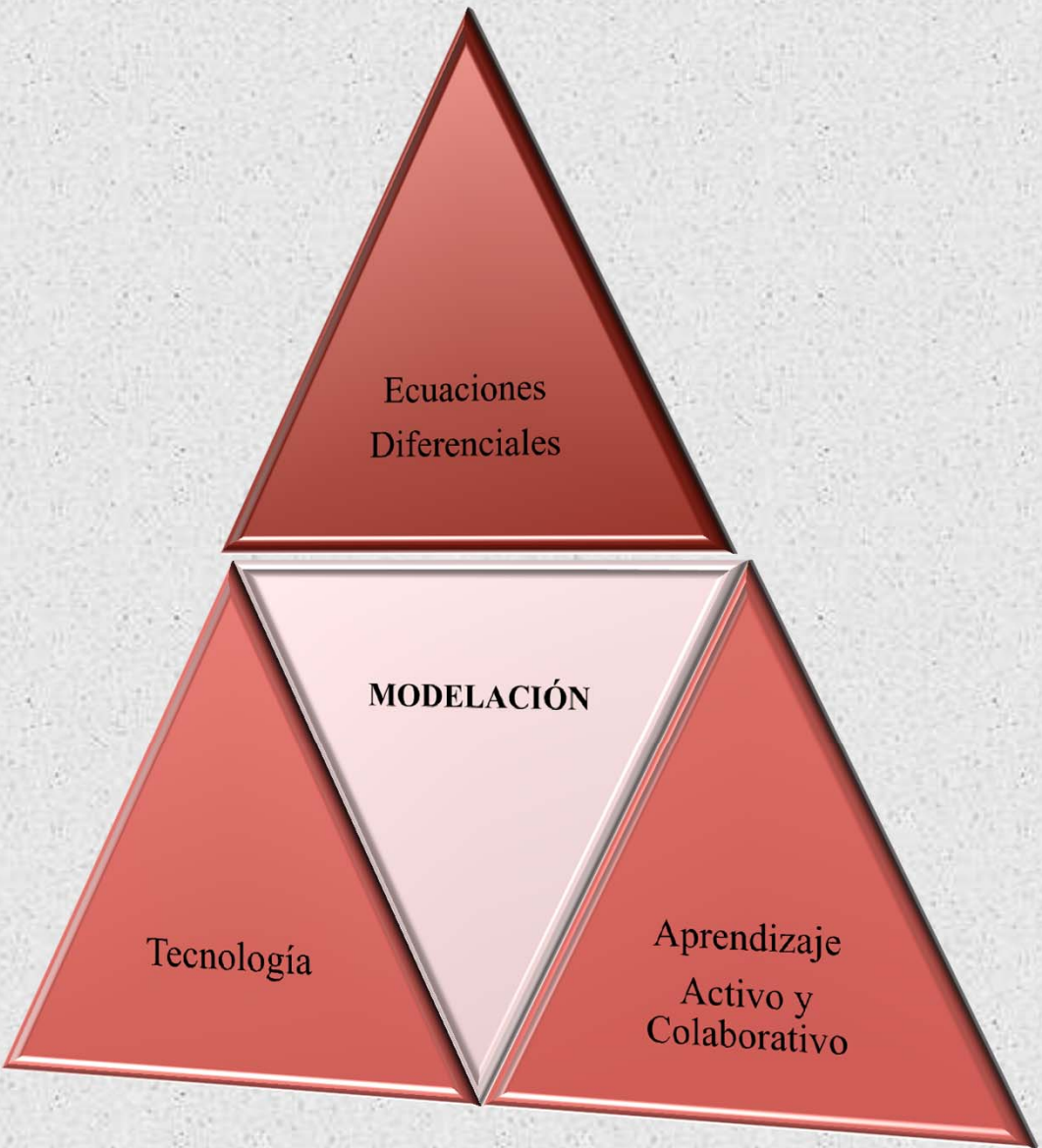
- *Estudios Previos
- Rediseño de Cálculo, 12 años)

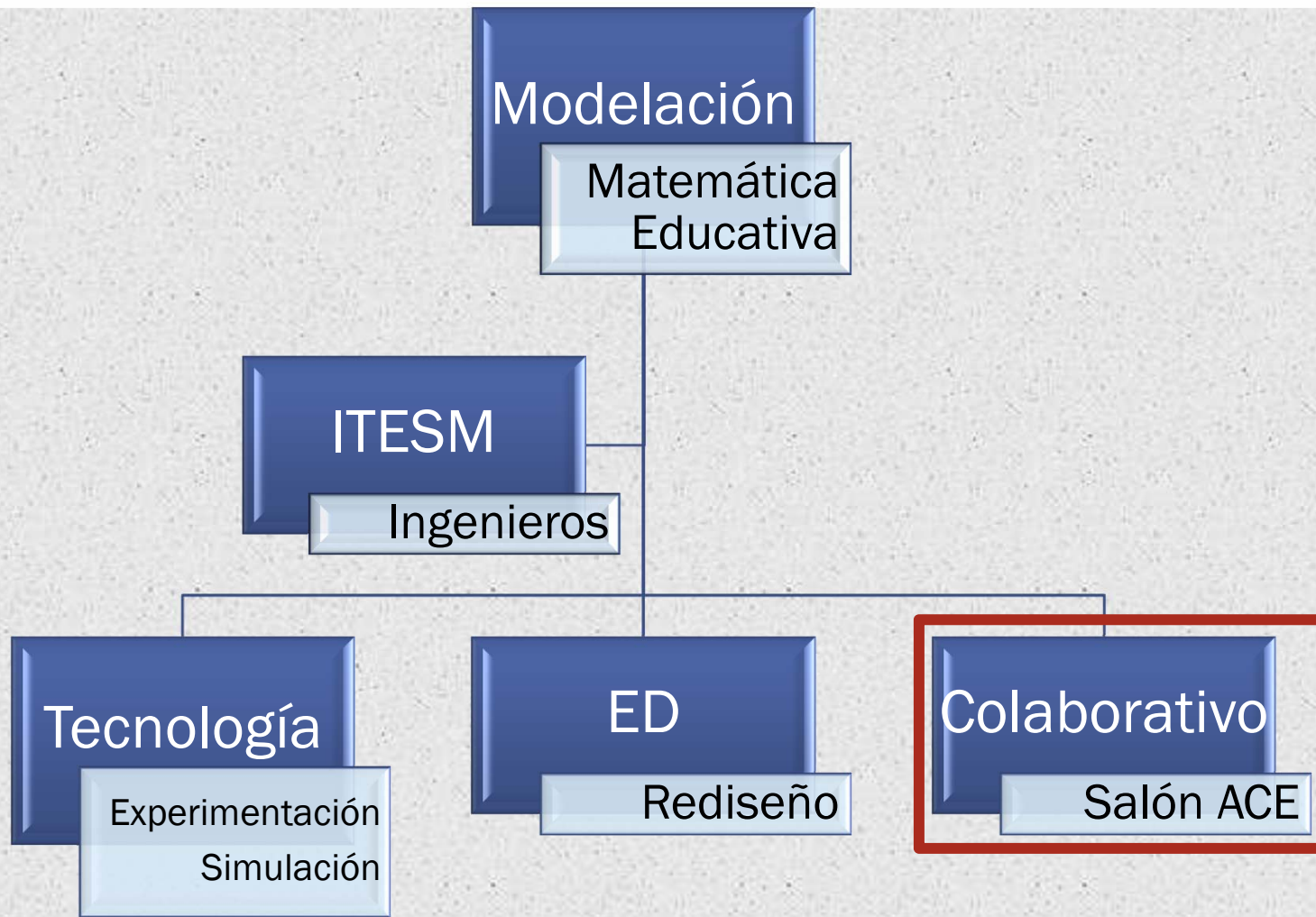
- *Entrevistas a profesionales (Química, Industriales, Eléctricos, Mecatrónica, Control)

- *Observaciones de clases
- Señales y Sistemas
- Circuitos Eléctricos

- Identificar prácticas de uso de ED en ingeniería
- ED como modelo de fenómenos diversos

Visión del curso ED en proyecto
(Rodríguez, 2010, 2011)





Ambiente de Aprendizaje Centrado en el Estudiante (ACE)



Zavala, Alarcón, Domínguez y Rodríguez
(2010)
Alvarado, Domínguez, Rodríguez y Zavala
(2011)

Proyecto de la Dirección de Ciencias Básicas (Campus MTY):
Coordinador: Genaro Zavala (Cátedra de Educación de la Física)

TECNOLOGÍA



APRENDIZAJE
COLABORATIVO



E-A de
ED

MODELACION

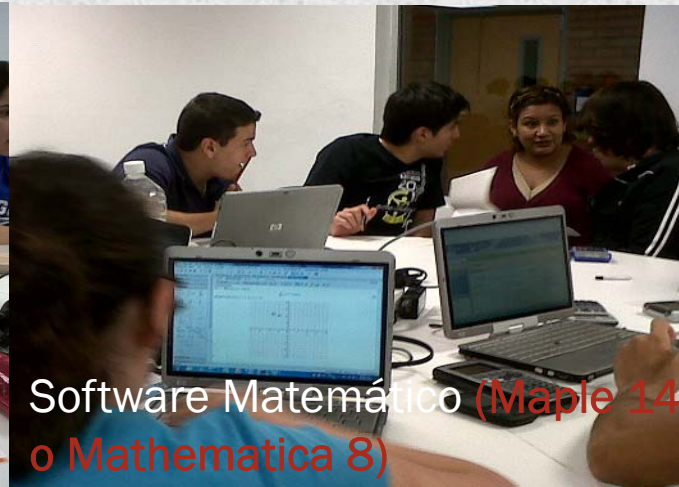
EXPERIMENTACION

AUTONOMIA DEL
ESTUDIANTE





Lápiz-Papel
Validación por medio electrónico

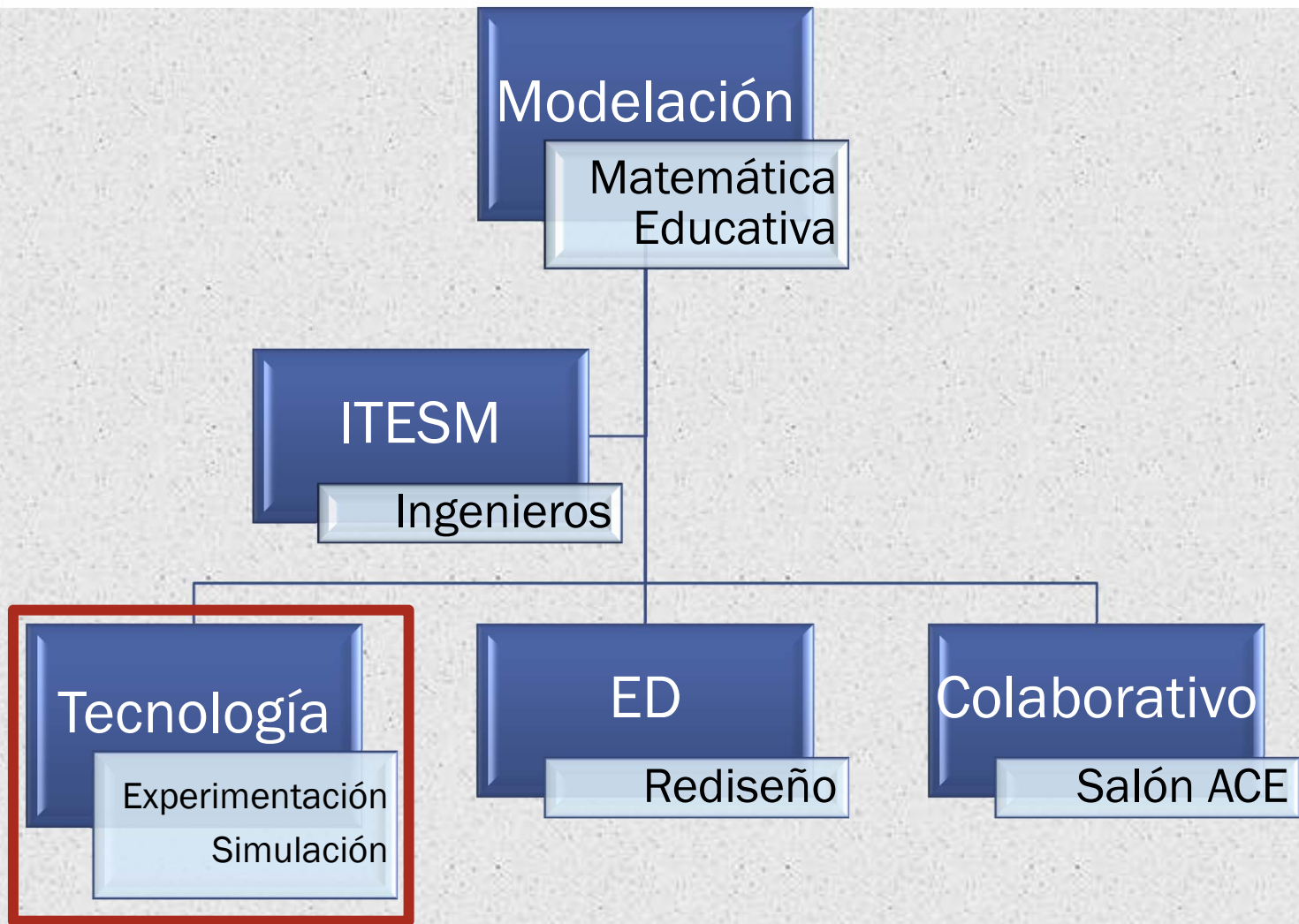


Software Matemático (Maple 14
o Mathematica 8)



Uso de sensores para experimentar

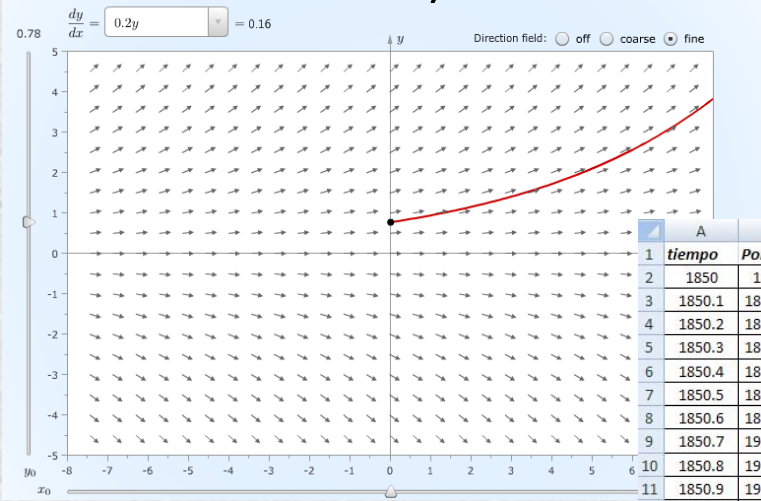
Modelación a través de diversos
ambientes



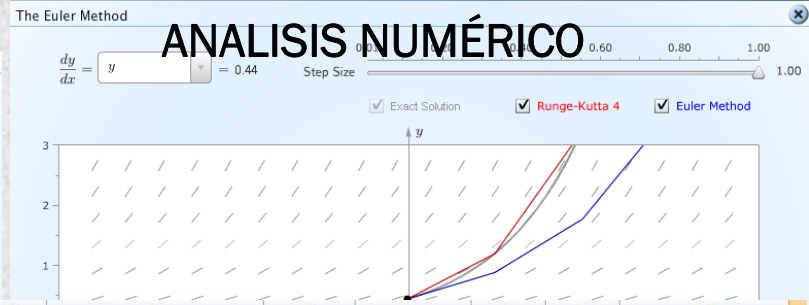
Introduciendo las ED

Crecimiento de poblaciones
Justificando el modelo

ANÁLISIS CUALITATIVO/GRÁFICO



ANÁLISIS NUMÉRICO



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	tiempo	Población	razón de cambio = 0.029*P(t)	$\Delta P \approx P'(t) \cdot \Delta t$	Población final			
2	1850	18.632	0.540328	0.0540328	18.6860328			
3	1850.1	18.68603	0.541894951	0.0541895	18.7402223			
4	1850.2	18.74022	0.543466447	0.05434664	18.79456894			
5	1850.3	18.79457	0.545042499	0.05450425	18.84907319			
6	1850.4	18.84907	0.546623123	0.05466231	18.9037355			
7	1850.5	18.90374	0.54820833	0.05482083	18.9585633			
8	1850.6	18.95856	0.549798134	0.05497981	19.01353615			
9	1850.7	19.01354	0.551392548	0.05513925	19.0686754			
10	1850.8	19.06868	0.552991587	0.05529916	19.12397456			
11	1850.9	19.12397	0.554595262	0.05545953	19.17943409			
12	1851	19.17943	0.556203589	0.05562036	19.23505445			
13	1851.1	19.23505	0.557816579	0.05578166	19.2908361			

Llenar la siguiente tabla:	
Δt	Población aproximada
5	
1	
0.1	2036
0.05	

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA

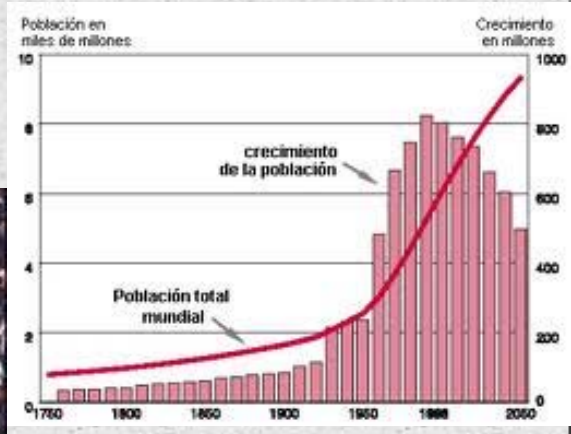
- *ED
- *FUNCIÓN SOLUCIÓN DE LA ED

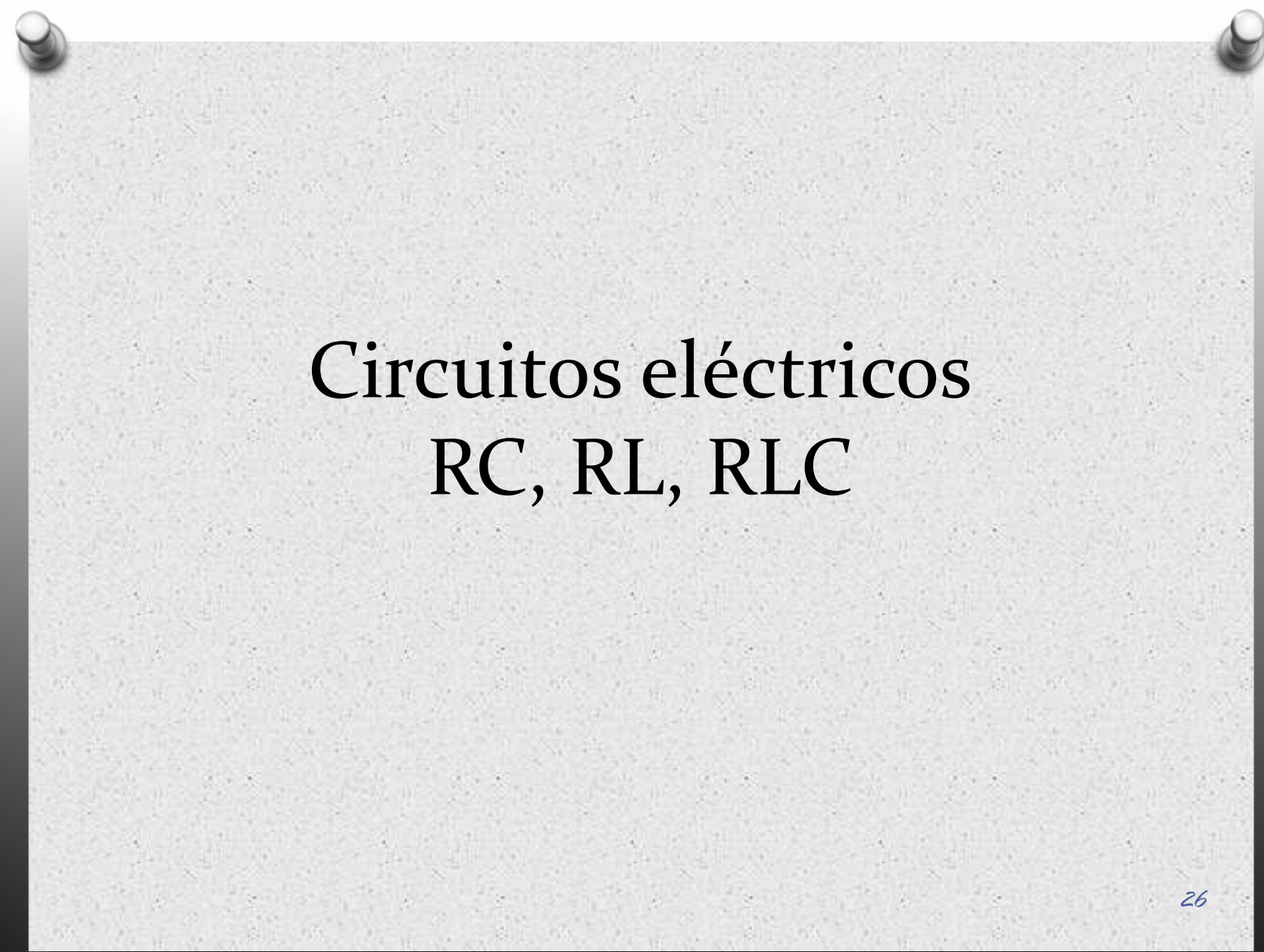
$$\ln |P| = kt + C_1$$

$$P(t) = C_2 e^{kt}$$

$$P(t) = 3.9 e^{0.0306 t}$$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$





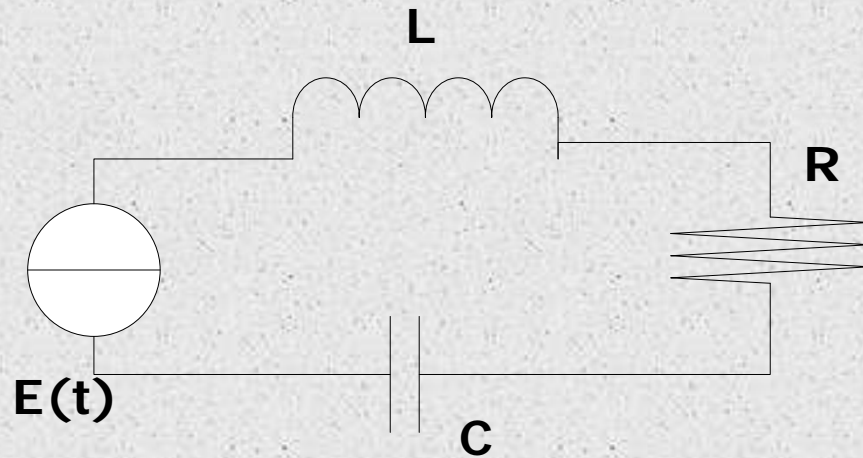
Circuitos eléctricos

RC, RL, RLC

Circuitos RLC

o Un circuito RLC
esta compuesto
por:

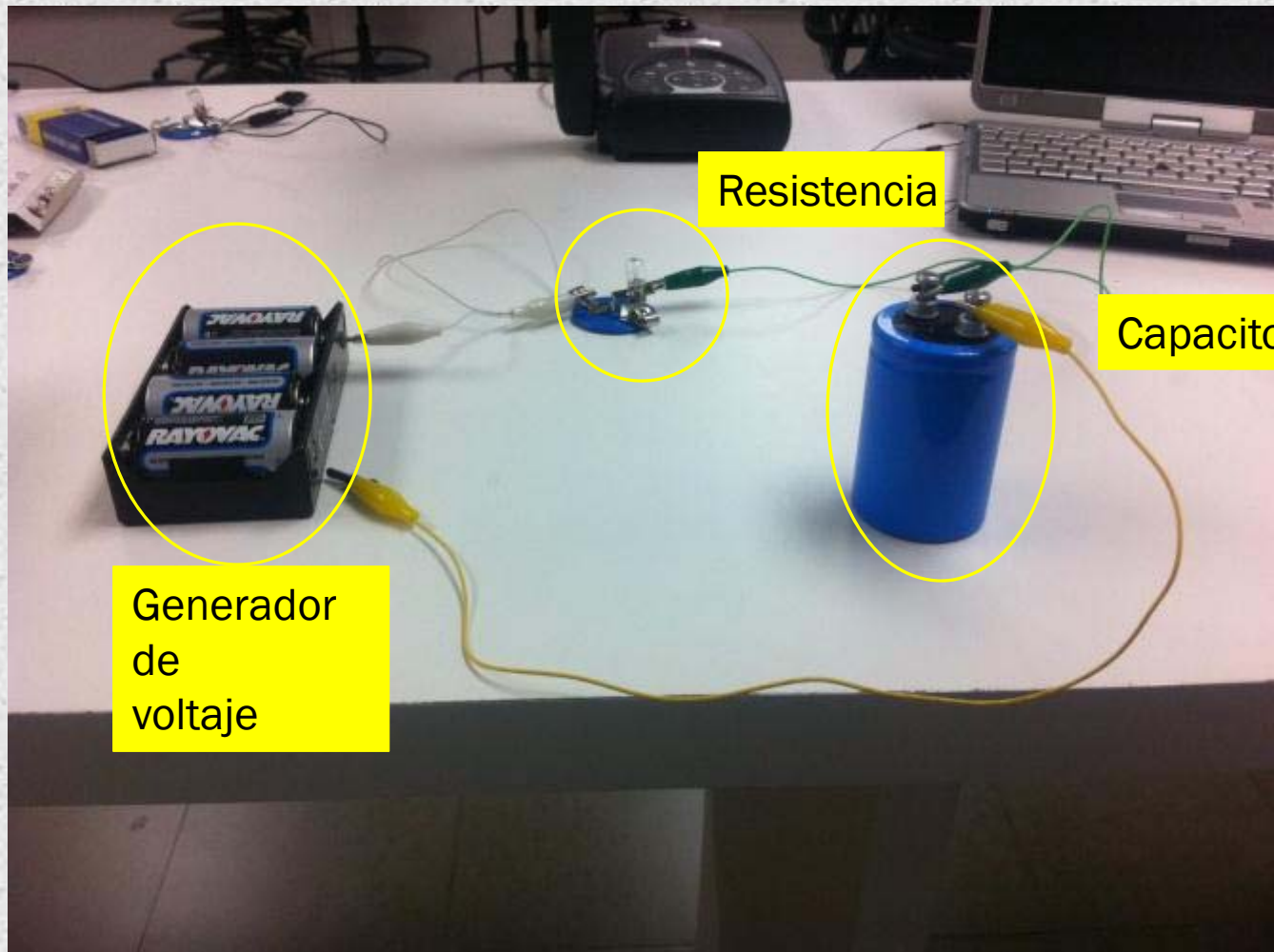
- o Resistencia R
- o Inductor L
- o Capacitor C



Como $i = dq/dt$ entonces

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E(t) \quad \longrightarrow \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

Actividad: Armar un Circuito RC

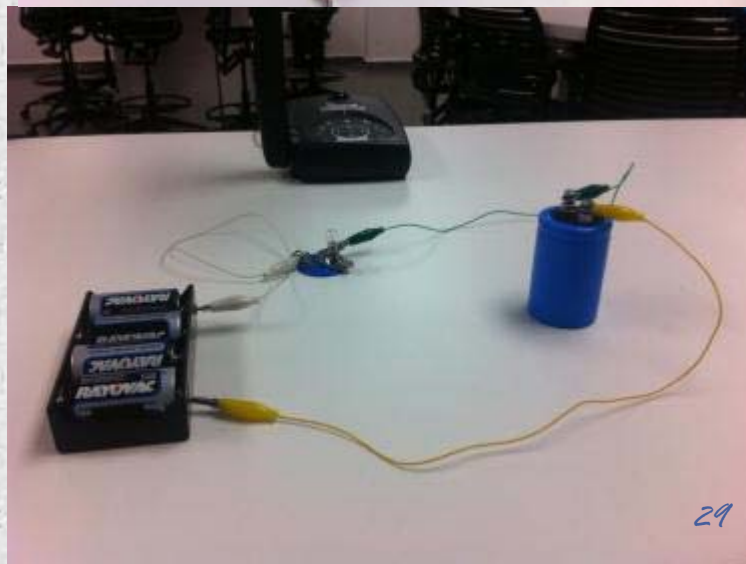


Generador
de
voltaje

Resistencia

Capacitor

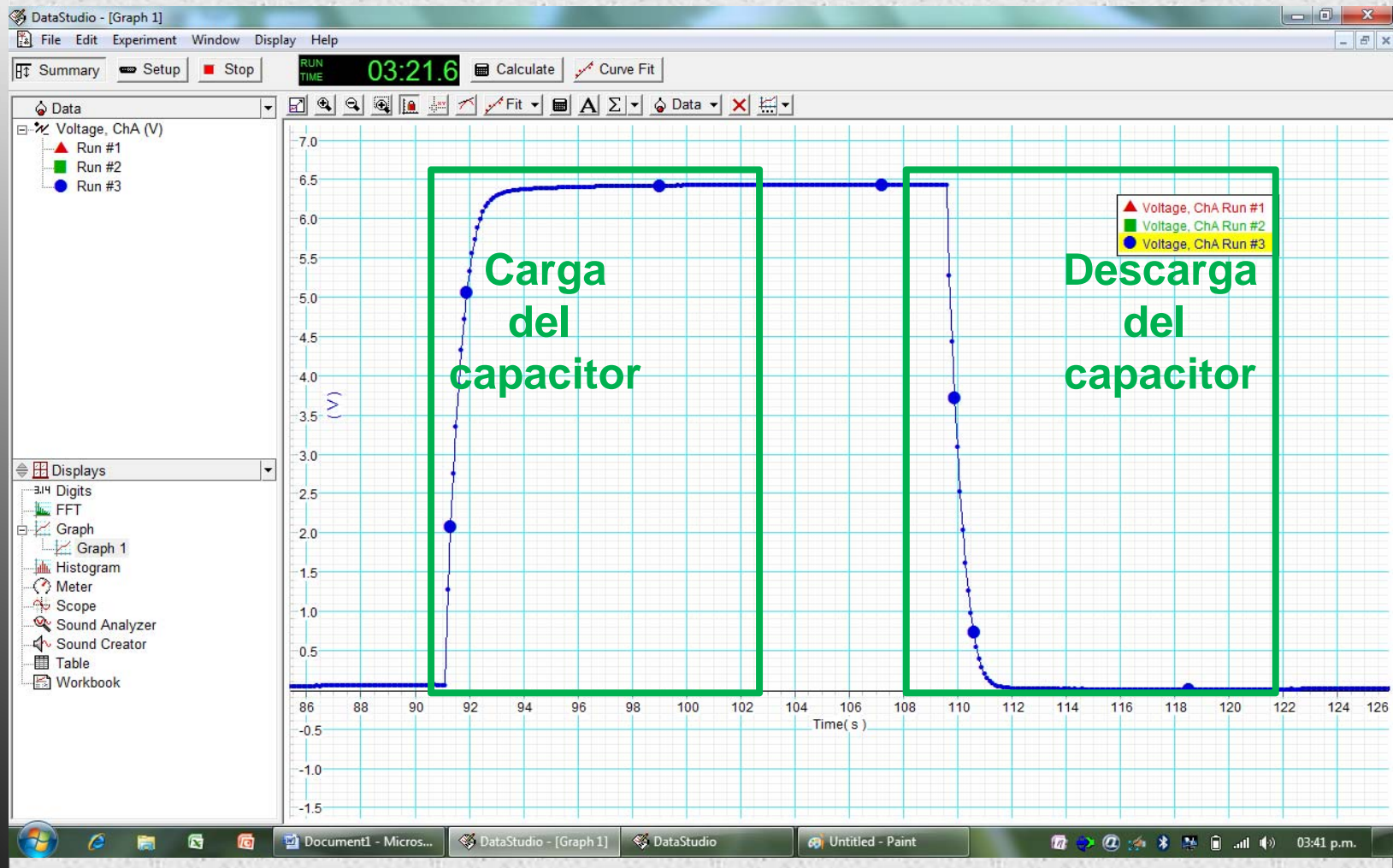
Apoyo con equipo del laboratorio de Física





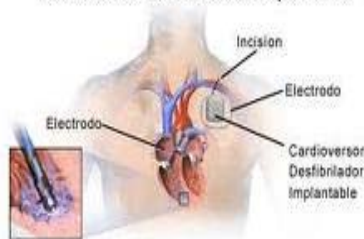
Salón ACE en ITESM Campus
Monterrey:
Curso ED (Ago-Dic 2010, Ene-
Mayo 2011, Verano 2011, Ene-Mayo
2012)

Carga y descarga del capacitor en un circuito RC

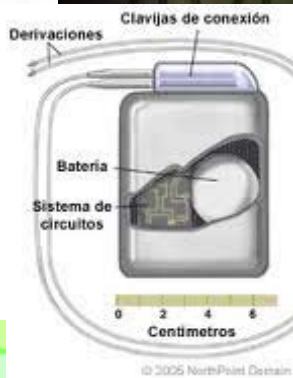




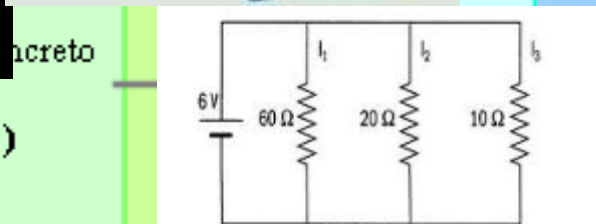
Cardioversor Desfibrilador Implantable



Extremo del Electrodo en el Ventrículo Derecho del Corazón



© 2005 NorthPoint Domain



hipótesis explícitas

run1		
Time	Potential	
53	5.2	3.204
54	5.3	3.204
55	5.4	3.210
56	5.5	3.210
57	5.6	3.204



R
E
A
L

Confrontación
Modelo - SR

(CM-SR)

validar
controlar

interpretar

Resultados
Pseudo - Concretos

(RPC)

Resultados
Físicos

(RP)

controlar

Estudio
Matemático

(EM)

Resultados
Matemáticos
(RM)

Domínio Pseudo -
Concreto

Domínio Físico

Domínio Matemático

Otro punto de vista sobre las ED

- o Una ED es vista como un modelo de un sistema físico...

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + L \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = \boxed{E(t)}$$

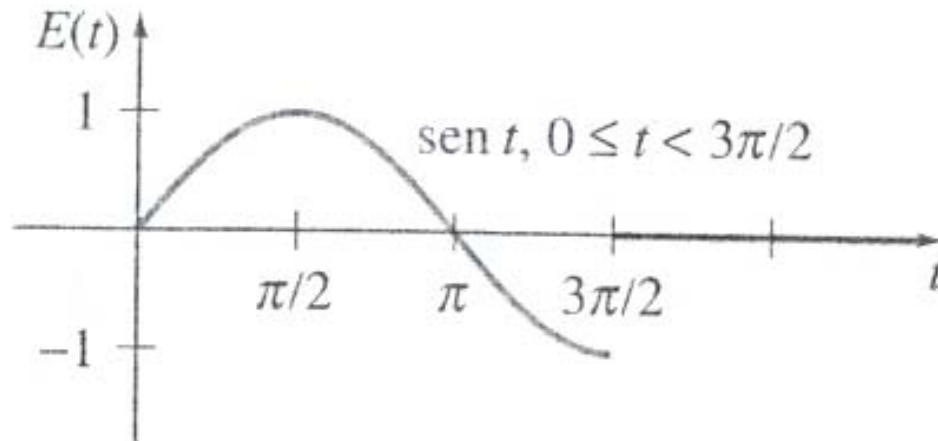
- o ...el cual es sometido a una perturbación o excitación $E(t)$ (*FUNCION DE ENTRADA*)

Fuente de poder para producir entradas de voltaje
periódicas (senoidales)

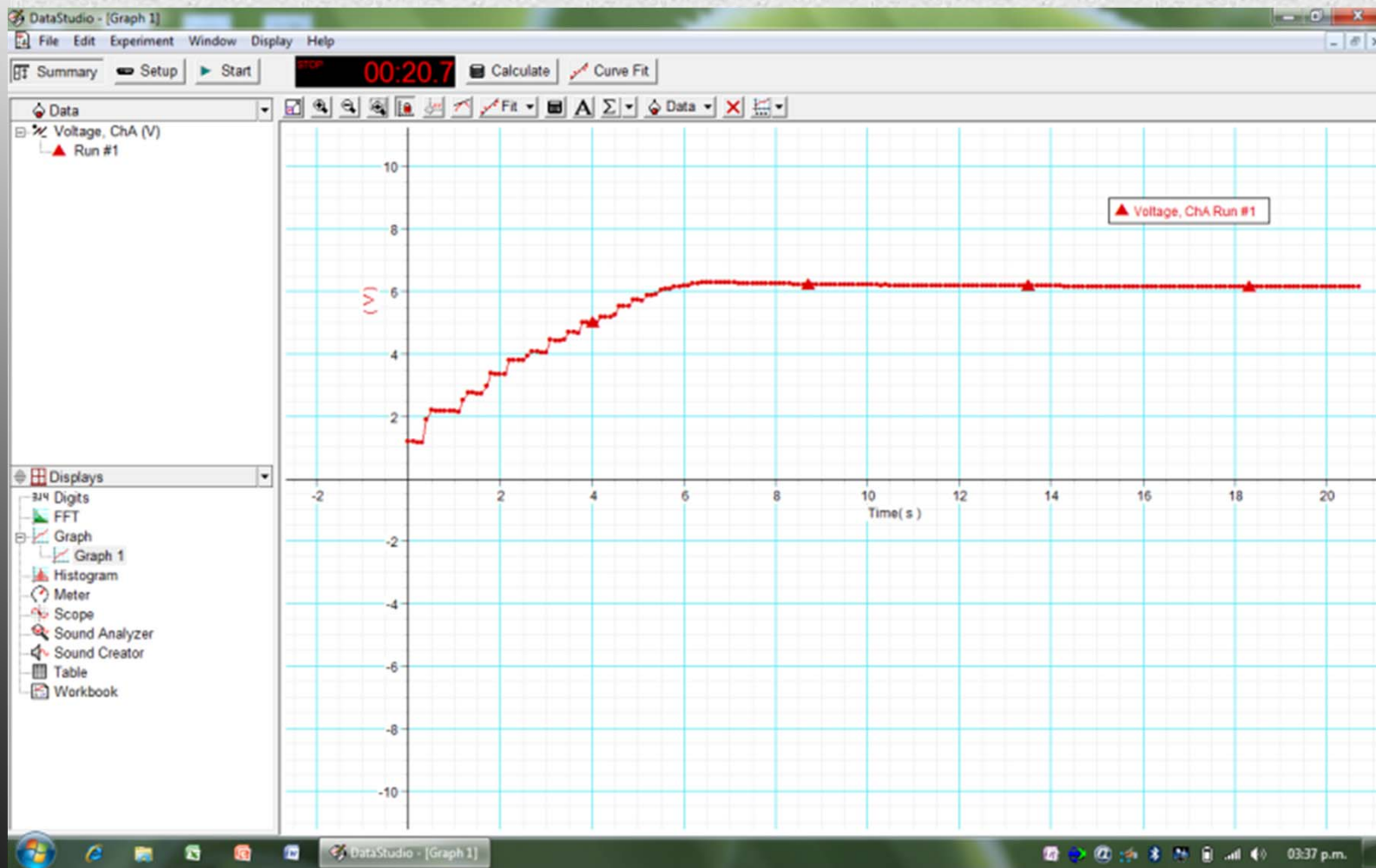


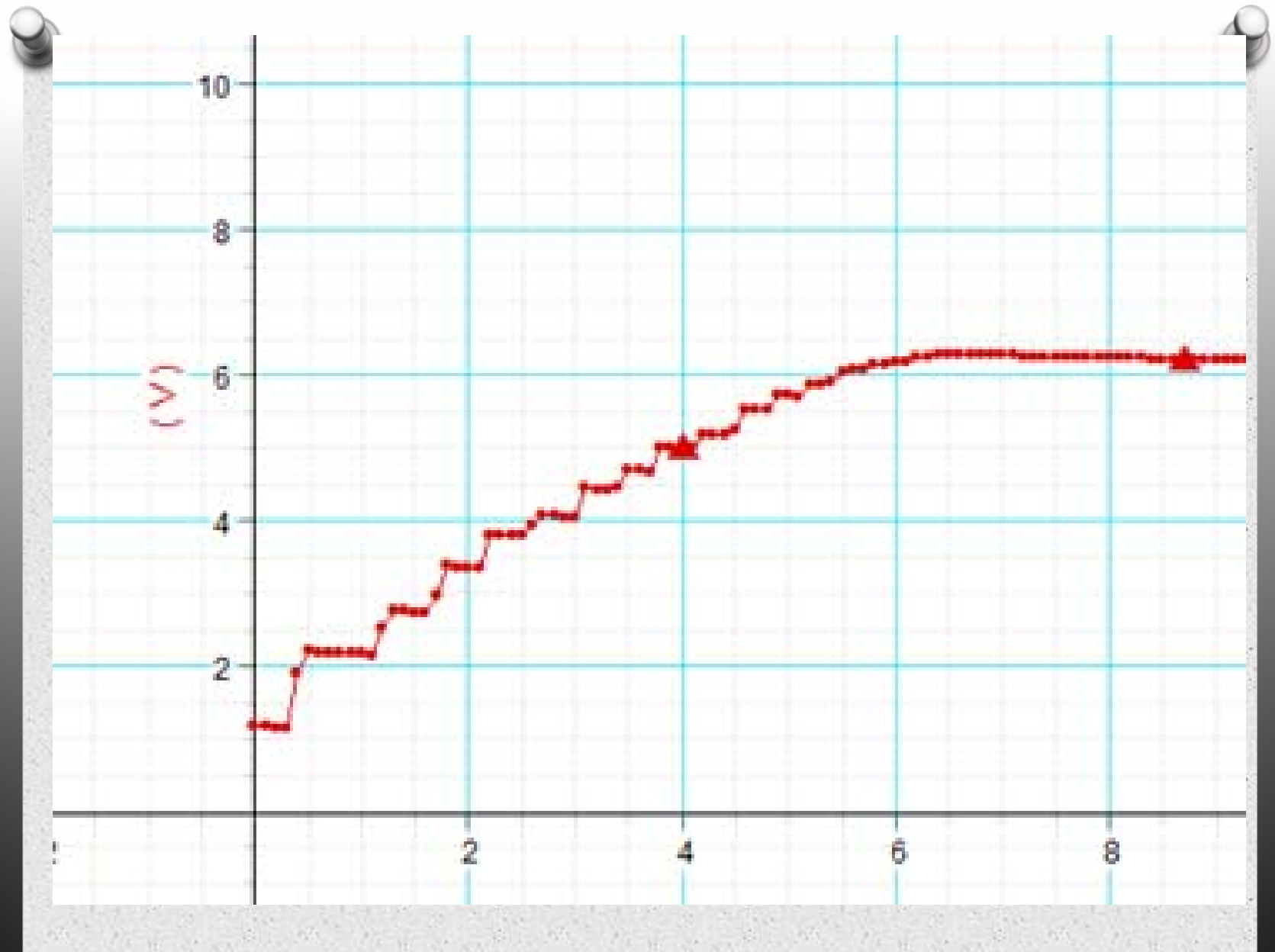
Problemas detonadores

- o Encontrar la corriente $i(t)$ en un circuito RL en serie de una sola malla cuando $i(0) = 0$, $L = 1$ h, $T = 10$ ohms y $E(t)$ de la forma:

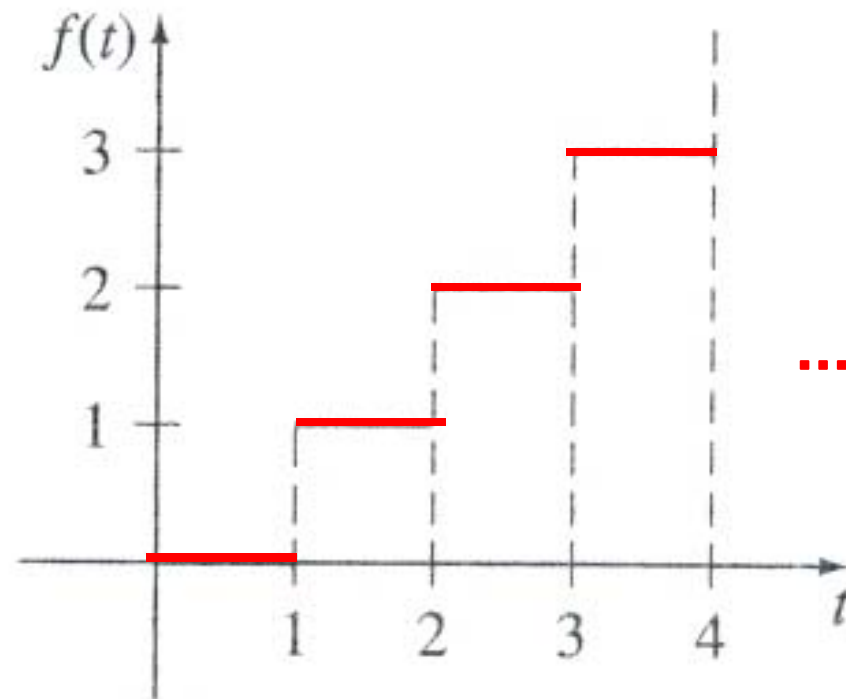


Carga “seccionada” del capacitor (función escalón/seccionada)






Ejemplo de función escalonada



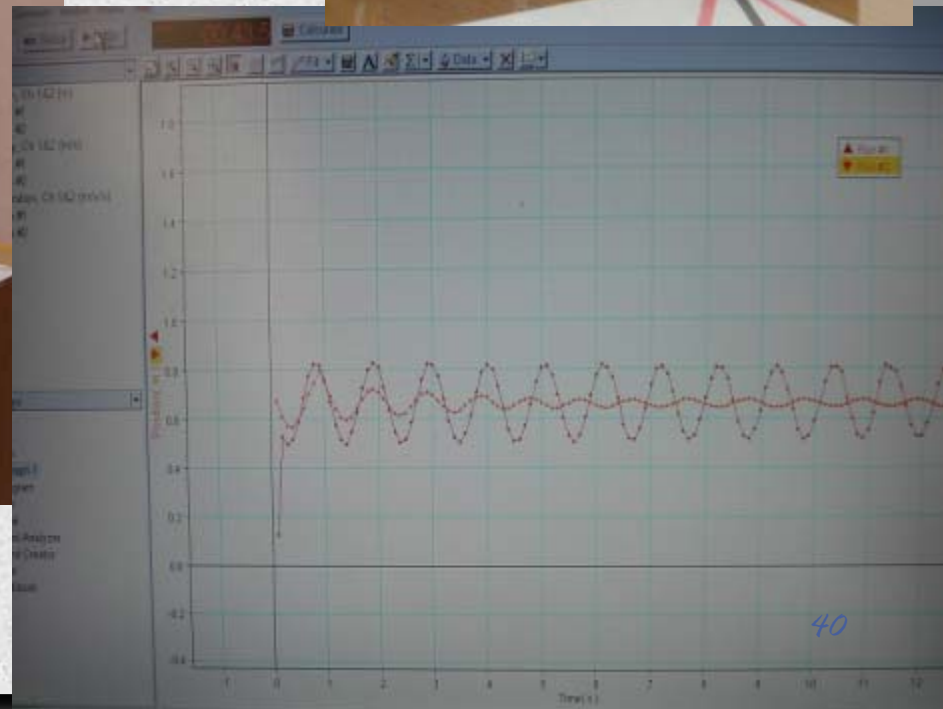
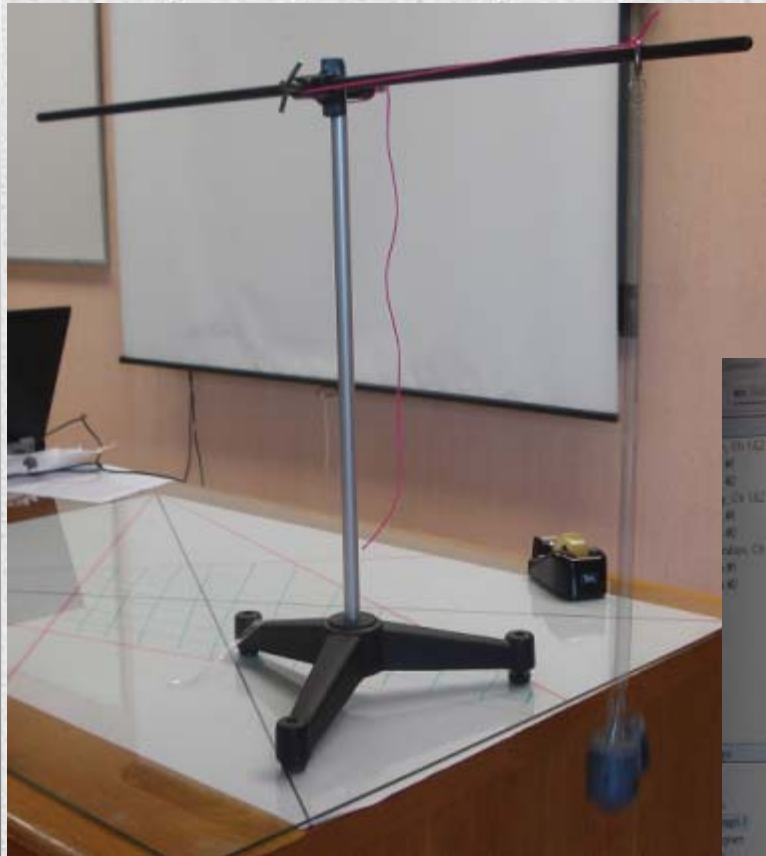
función escalera



Modelando un sistema Masa-resorte

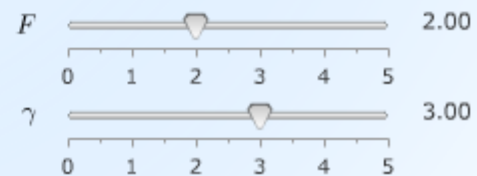
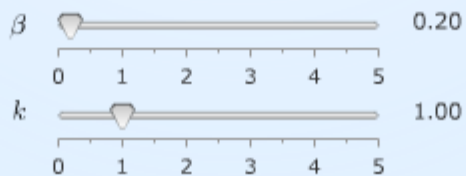
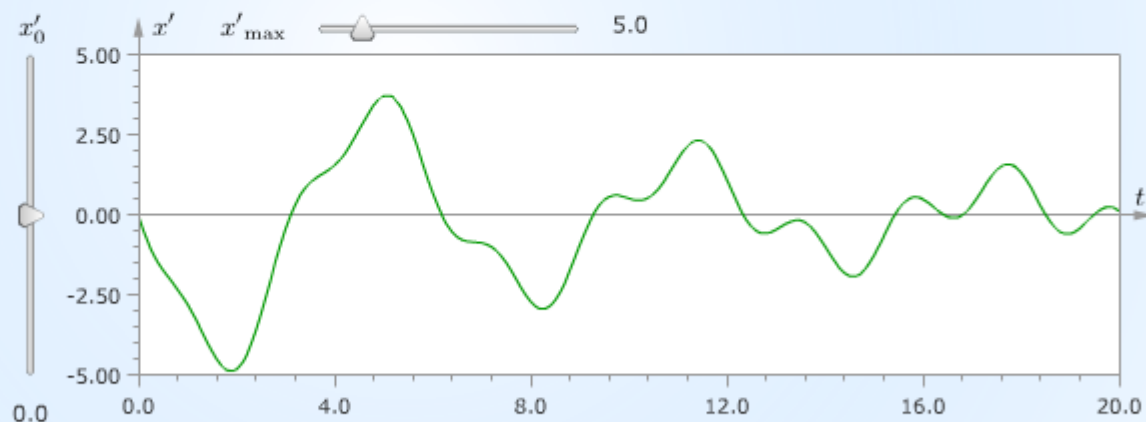
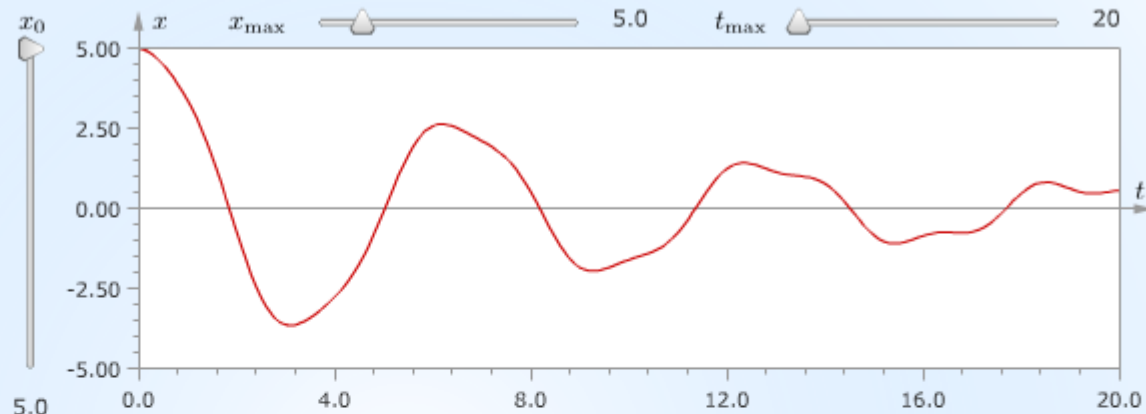
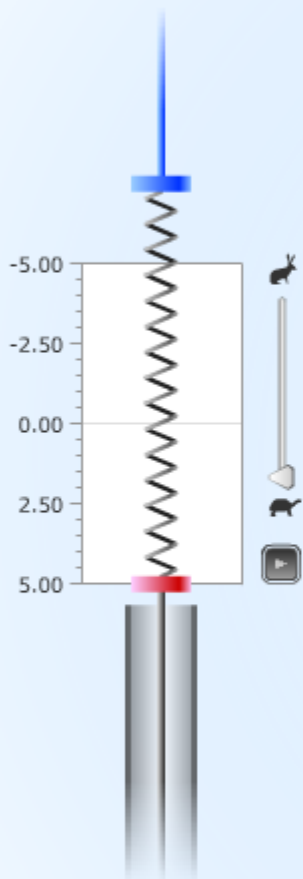
Experimentación / Simulador

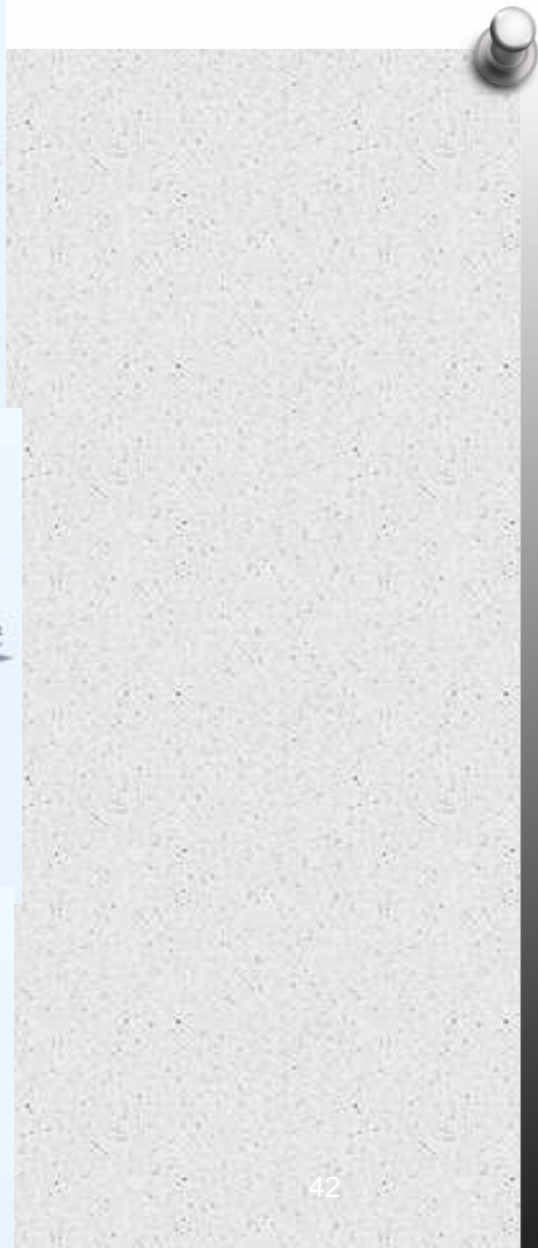
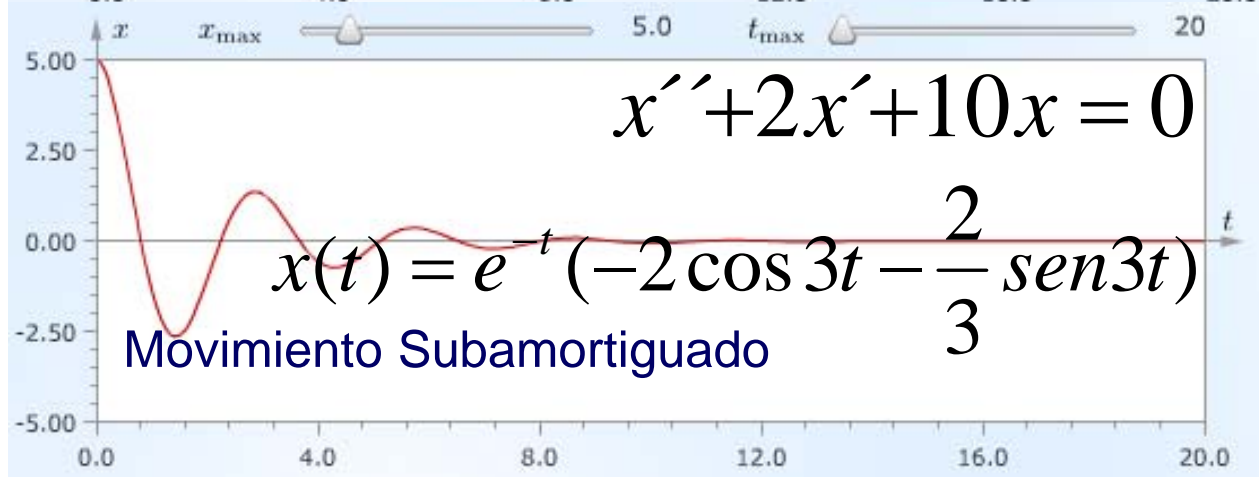
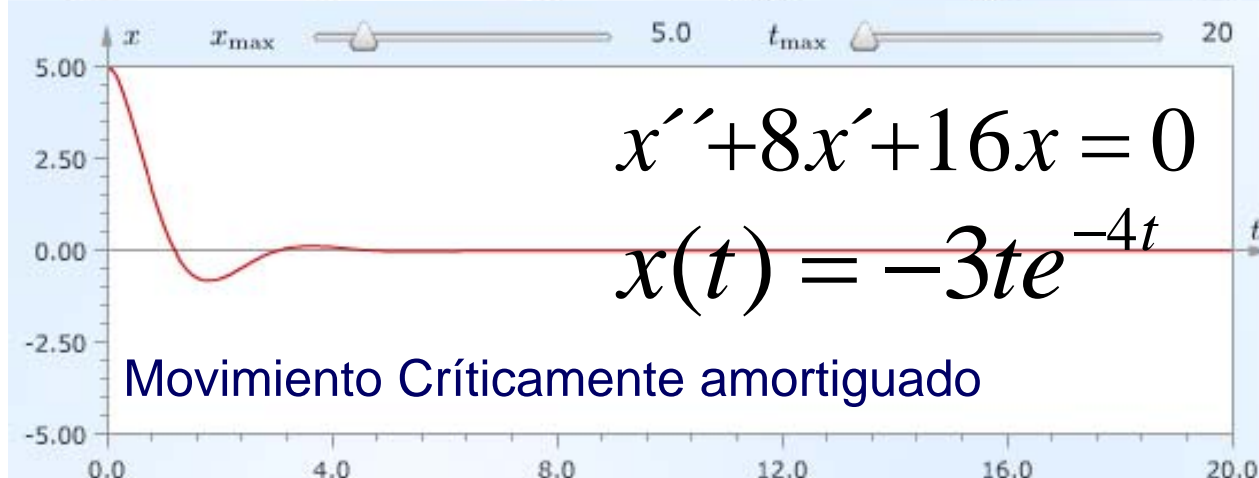
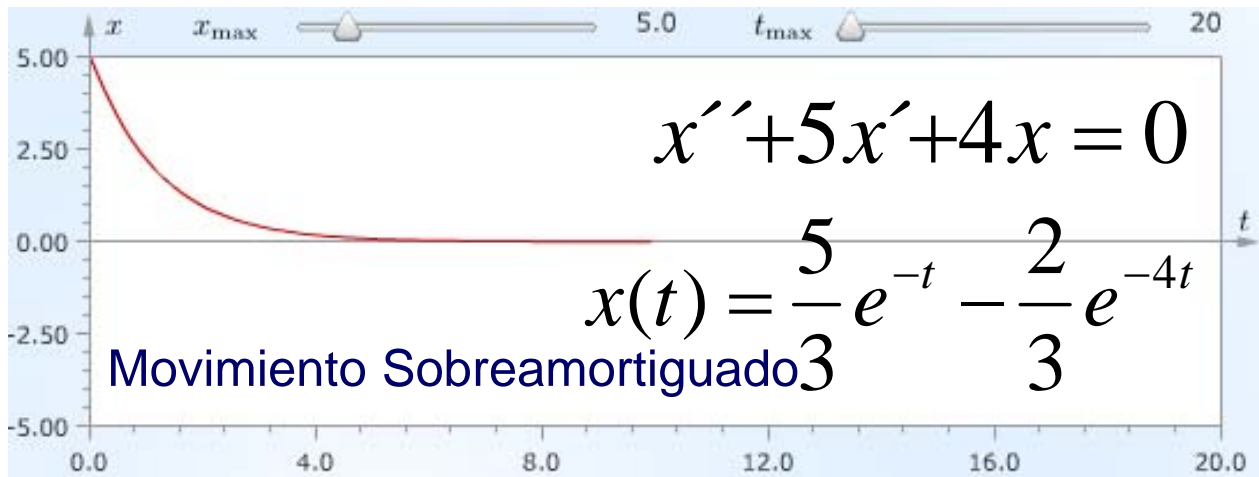
Experimento masa-resorte ED segundo orden



Spring/Mass System

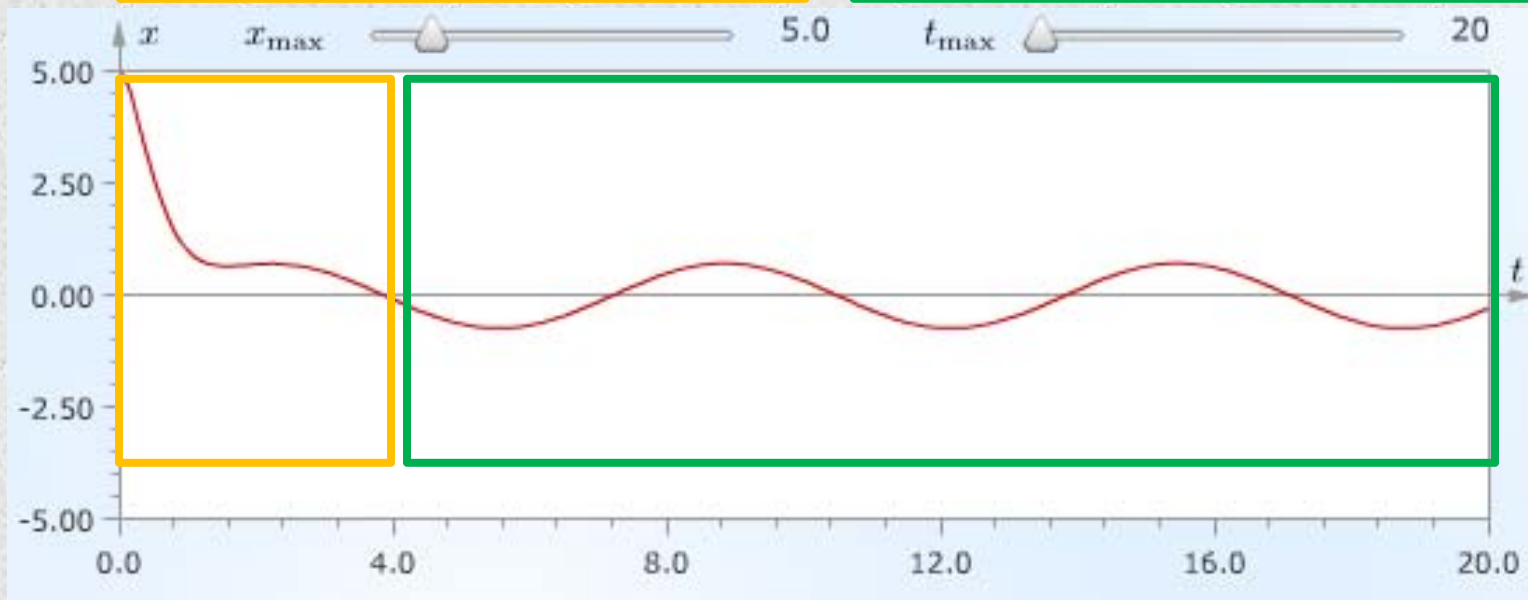
$$m x'' + \beta x' + k x = F \sin(\gamma t)$$





Análisis de la solución para el caso de movimiento forzado

$$x(t) = e^{-3t} \left(\frac{38}{51} \cos t - \frac{86}{51} \sin t \right) + \frac{25}{102} \cos(4t) + \frac{50}{51} \sin(4t)$$



Solución = Edo. Transitorio + Edo. Estable

DOMINIO REAL

hipótesis implícitas y/o explícitas



hipótesis explícitas



hipótesis explícitas



run1		
Time	Potential	
53	5.2	3.204
54	5.3	3.204
55	5.4	3.210
56	5.5	3.210
57	5.6	3.204

Confrontación Modelo - SR
(CM-SR)

validar controlar
interpretar

Resultados Pseudo - Concretos
(RPC)

Resultados Físicos
(RP)

interpretar
controlar

Estudio Matemático
(EM)
Resultados Matemáticos
(RM)



Domínio Pseudo - Concreto

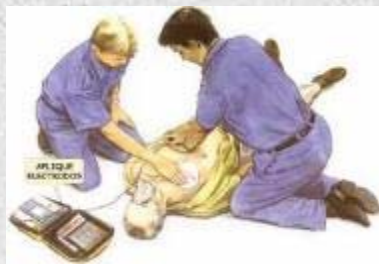
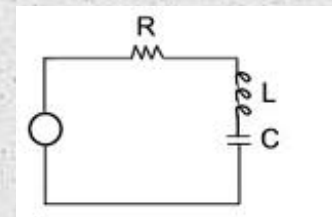
Domínio Físico

Domínio Matemático

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \beta \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$



$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + L \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E(t)$$



Cambio (crecimiento) de Población

Obj. Determinar que el valor de la k es cte, justificar el modelo $P' = k \cdot P$

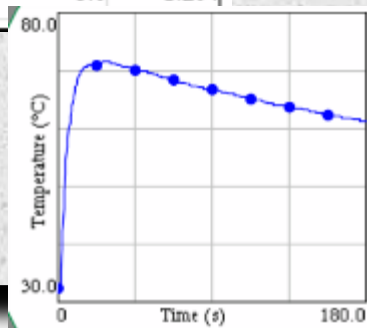


Cambio de Temperatura

Obj. Determinar la ED que modela el fenómeno a través del ajuste de datos exp.



Time	Potential
53	3.204
54	3.204
55	3.210
56	3.210
57	3.204



Sistema Masa-resorte

Obj. Determinar los diferentes tipos de soluciones dependiendo de los parámetros m , b , k



Circuitos eléctricos

Obj. Explicar/Acercar al alumno al modelo ED del circuito a través de la experimentación



Conclusiones sobre la EA de las ED a través de la modelación

- ▶ **Trabajo colegiado** para el diseño de situaciones de aprendizaje
- ▶ **Experimentación/Simulación** como apoyo importante en el proceso holístico de modelación
- ▶ Uso **de tecnología** adecuada para fortalecer competencias diversas: matemáticas, extra-matemáticas y/o de modelación
- ▶ **Capacitación de profesores** en modelación
- ▶ Desarrollo de **competencia de modelación**

¡Gracias por su atención!

- o Ruth Rodríguez Gallegos
- o ruthrdz@itesm.mx

*ITESM Campus Monterrey
Departamento de Matemáticas
Cátedra en Matemática Educativa*